Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 10 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3+2 Punkte)*

(a) Beweise unter Verwendung des Supremumsaxioms, dass das *Archimedische Axiom* in $\mathbb{R}$ gilt, wonach

$$\forall\, x, y > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \, nx > y$$

(b) Verwende Teil (a) und schlussfolgere, dass folgende Aussage wahr ist:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, n \in \mathbb{Z} : \, n \leq x < n + 1$$

Lösung.

(a) Angenommen die Aussage wäre falsch, dann gibt es ein $y > x$, sodass $nx \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nach dem Supremumsaxiom gibt es dann eine kleinste obere Schranke y_0, sodass $nx \leq y_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$, so ist $Nx \leq y_0$. Andererseits gilt aber auch $(N+1)x \leq y_0$ und durch Umformen erhalten wir die erste Ungleichung in

$$Nx \leq y_0 - x.$$

Also ist $y_1 := y_0 - x$ eine obere Schranke für Nx und

$$y_1 < y_0 \,.$$

Widerspruch, denn y_0 war die kleinste obere Schranke für Nx.

(b) Für $x = 0$ ist die Aussage klar. Es genügt nun, den Beweis für $x > 0$ durchzuführen, denn dann gilt die Aussage schon für alle $x \in \mathbb{R}$, weil wir für $x < 0$ zum Negativen $-x > 0$ übergehen können. Aus dem Archimedischen Axiom folgt nun, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $m = m \cdot 1 > x$. Das Minimum $\min(m \in \mathbb{N} \ : \ m > x)$ existiert und wir definieren

$$n := \min(m \in \mathbb{N} \ : \ m > x) - 1 \,.$$

■

Aufgabe 2: *(1+2+2 Punkte)* Untersuche die Konvergenz der Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeweils für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

(a) $a_n := \frac{i^n}{n^2}$;

(b) $a_n := \frac{5(n^2-1)}{n^2+5}$;

(c) $a_n := \frac{1}{kn^2+1}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Gib bei Konvergenz deren jeweiligen Grenzwert an.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt die Ungleichung

$$\left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \frac{|i^n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

genau dann, wenn

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon}\,, \text{ d.h. wenn} \qquad n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\,.$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert 0.

(b) Wir geben zwei mögliche Lösungswege an.

Lösungsweg 1:

Wir schreiben a_n durch Ausklammern von n^2 um,

$$a_n = \frac{5(n^2-1)}{n^2+5} = \frac{5-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}$$

Betrachte nun die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$b_n := 5 - \frac{5}{n^2}\,, \qquad c_n := 1 + \frac{5}{n^2}\,.$$

Wir wissen, dass $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Also konvergieren $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 1.$$

Da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, konvergiert also auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} c_n} = 5\,.$$

Lösungsweg 2:

Wir behaupten, dass $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = 5$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt die Ungleichung

$$\left|\frac{5n^2-5}{n^2+5} - 5\right| = \left|\frac{30}{n^2+5}\right| = \frac{30}{n^2+5} < \varepsilon$$

genau dann, wenn

$$n^2 > \frac{30}{\varepsilon} - 5\,.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

(c) Wir geben zwei mögliche Lösungswege an.

Lösungsweg 1:

Wir schreiben

$$a_n = \frac{1}{kn^2+1} = \frac{b_n}{c_n} \quad \text{mit} \quad b_n := \frac{1}{n^2}\,, \quad c_n := k + \frac{1}{n^2}\,.$$

Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} c_n = k$. Also ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Nullfolge, wenn $k = 0$ gilt. Wir machen eine Fallunterscheidung:

(i) Ist $k \neq 0$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{k} = 0\,.$$

(ii) Ist hingegen $k = 0$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant und $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1$.

Lösungsweg 2:

Wir machen eine Fallunterscheidung:

(i) Ist $k = 0$, dann ist die Folge konstant, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, und damit konvergent, $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1$.

(ii) Ist $k > 0$, so ist stets $kn^2 + 1 > 0$. In diesem Fall ist (a_n) eine Nullfolge, denn

$$\left|\frac{1}{kN^2+1}\right| < \frac{1}{kN^2} < \varepsilon$$

für

$$N > \sqrt{\frac{1}{k\varepsilon}}$$

(iii) Ist $k < 0$, so ist stets $|k|n^2 - 1 > 0$ für $n \geq 2$, da $k \neq -1$. In diesem Fall ist (a_n) eine Nullfolge, denn für $n \geq 2$ ist

$$\left|\frac{1}{|k|N^2-1}\right| = \frac{1}{|k|N^2-1} < \varepsilon$$

falls

$$N > \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{|k|\varepsilon}}$$

■